Olimpiada Națională de Matematică
- etapa locală – 11 februarie 2012
Clasa a VII-a
Soluții şi barem

Varianta 2

1. a) Avem cazurile :

i) $n=4k \Rightarrow u\left(3^n+7^{n+1}\right)=8$.. **1p**

ii) $n=4k+1 \Rightarrow u\left(3^n+7^{n+1}\right)=2$.. **1p**

iii) $n=4k+2 \Rightarrow u\left(3^n+7^{n+1}\right)=2$.. **1p**

iv) $n=4k+3 \Rightarrow u\left(3^n+7^{n+1}\right)=8$.

Studiind toate cazurile obținem ca $\sqrt{3^n+7^{n+1}}$ este irațional.............................. **1p**

b) Presupunem prin absurd că există astfel de numere .

Avem $\overline{bc}<100 \Rightarrow \sqrt{\overline{bc}}<10$ şi cum $a<10 \Rightarrow \sqrt{\overline{abc}}<20 \Rightarrow \overline{abc}<400 \Rightarrow a\in\{1,2,3\}$. **1p**

Dacă $a=3 \Rightarrow \sqrt{\overline{3bc}}=\sqrt{\overline{bc}}+3$, avem $\sqrt{\overline{bc}}<10 \Rightarrow \sqrt{\overline{bc}}+3<13 \Rightarrow \overline{3bc}<169$ fals.

Dacă $a=2 \Rightarrow \sqrt{\overline{2bc}}=\sqrt{\overline{bc}}+2$, avem $\sqrt{\overline{bc}}<10 \Rightarrow \sqrt{\overline{bc}}+2<12 \Rightarrow \overline{3bc}<144$ fals.

Dacă $a=1 \Rightarrow \sqrt{\overline{1bc}}=\sqrt{\overline{bc}}+1$, avem $\sqrt{\overline{bc}}<10 \Rightarrow \sqrt{\overline{bc}}+1<11 \Rightarrow \overline{1bc}<121$, deci obținem că $\overline{bc}\in\{10,11,....,20\}$.

Tratând fiecare caz în parte obținem că relația $\sqrt{\overline{1bc}}=\sqrt{\overline{bc}}+1$ este falsă, deci nu există numere de forma cerută.. **2p**

2. a) Scrie $S=2009\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{2007\cdot 2009}\right)$ 2p

Află $2S=2009\cdot\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+\frac{1}{2007}-\frac{1}{2009}\right) \Leftrightarrow 2S=2009\cdot\left(1-\frac{1}{2009}\right)$ 2p

$S=\frac{2009\cdot 2008}{2009}\cdot\frac{1}{2}=1004\in\mathbb{N}$ 2p

b) x+1004 = 2010 $\rightarrow$ x = 1006 .... 1p

3. a) Din relațiile BM | | AC, AN | | BD şi AC $\perp$ BD $\Rightarrow$ MB $\perp$ AN ……........... 1p

b) Fie MB $\cap$ AN = {P}

Justificare ΔMNP ~ ΔDBA …………………. 1p

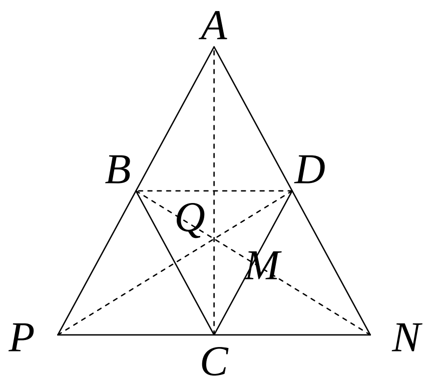
$\frac{MN}{DB}=\frac{NP}{AB}=\frac{MP}{AD}$ …………………. 1p

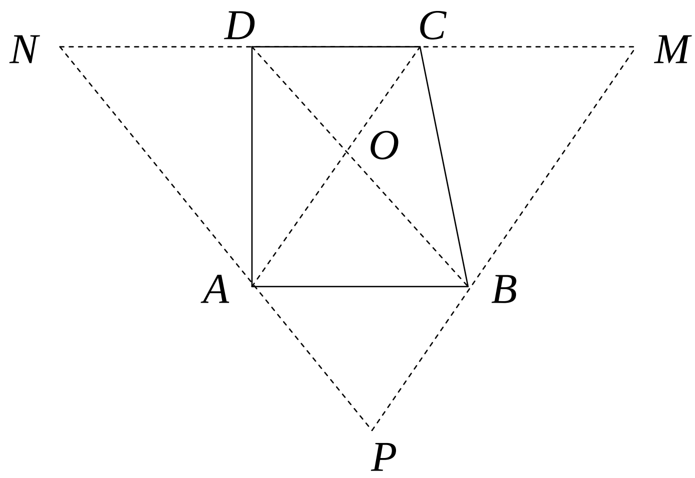
MN · AB = DB · NP …………….. 1p

(2AB + CD) · AB = DB · (DB + BO) ………………. 1p

$2AB^2$ + AB · CD = DB^2 + AB^2 ………………….. .... 1p

AB^2 + AB · CD = BD^2 …………….. 1p





4. a) Fie A' simetricul lui A față de M $\Rightarrow$ $ACA'B$=paralelogram$\Rightarrow[AC]=[BA']$. 2p.

Atunci: $AB+AC=AB+BA'>AA'=2AM$, deci $AM<\frac{AB+AC}{2}$, (1)., ... 1p

b) În $\triangle$ ABC aplicăm teorema bisectoarei $\frac{AD}{DC}=\frac{AM}{MC}\Leftrightarrow\frac{AD}{DC}=\frac{AM}{\frac{BC}{2}}\Leftrightarrow\frac{AD}{DC}=\frac{2AM}{BC}$

de unde $AM=\frac{AD\cdot BC}{2DC}$; (2), ... 2p.

Din relațiile (1) şi (2) rezultă: $\frac{AD \cdot BC}{2DC} < \frac{AB + AC}{2} \Leftrightarrow \frac{AD}{DC} < \frac{AB + AC}{BC} \Leftrightarrow$ 1p

$\Leftrightarrow \frac{AD + DC}{DC} < \frac{AB + AC + BC}{BC} \Leftrightarrow \frac{AC}{DC} < \frac{P_{\triangle ABC}}{BC}$, deci $P_{\triangle ABC} > \frac{BC \cdot AC}{DC}$, ... 1p.